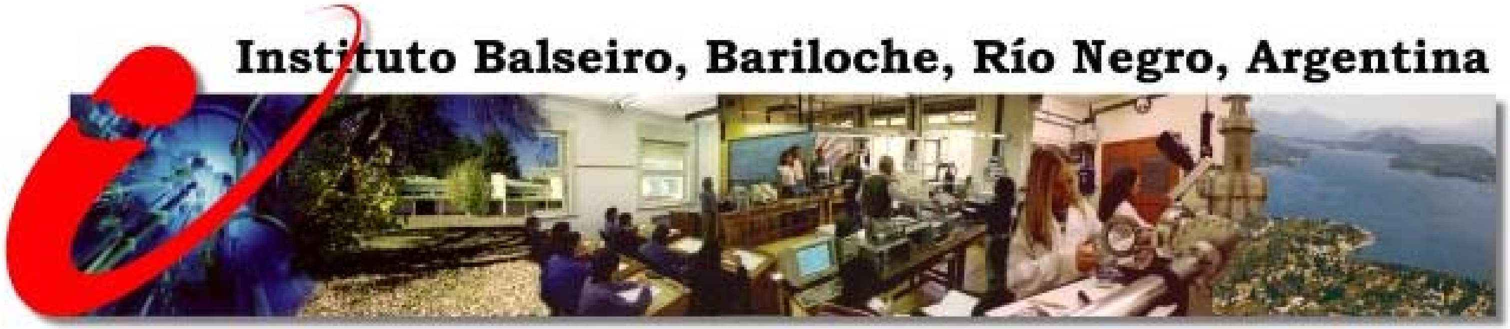


Recomendaciones para resolver problemas de desarrollo

Willy Pregliasco

No existen reglas de aplicación general acerca de cómo encarar correctamente la resolución de un problema de desarrollo.

En la preparación del examen de ingreso, hay tres tipo de problemas que tenemos que encarar: los *ejercicios*, los *problemas de desarrollo* y los *problemas de opciones*.

Los ejercicios son cosas que uno hace en un gimnasio. Es como levantar una pesa y desarrollar la musculatura necesaria para jugar mejor en la cancha. Hace falta hacer muchos ejercicios para terminar de entender las cosas, pero una vez que se entendieron, empiezan a ser más y más inútiles y aburridos. Existen excelentes colecciones de ejercicios. A mí me gustan los del Halliday-Resnik, aunque algunos de los que figuran son bastante más que meros ejercicios.

Por otra parte están *los problemas*. **Los problemas son pretextos para discutir**. Todo ejercicio se puede convertir en un problema si se tiene la inquietud necesaria. La diferencia no está en el enunciado, sino en la actitud con que se encara la resolución. *Lo que aparece en los exámenes son problemas de este tipo.* Me gusta comparar el enunciado de un problema con la manera con que se inician las conversaciones en un boliche. Uno se acerca al sexo opuesto y comenta ¿Siempre venís por acá? ¿Sos de Bariloche? ¿Pensás que el invierno va a ser nevador? Hay preguntas que funcionan mejor que otras, pero si hay buena predisposición del otro lado, la pregunta en sí pasa a un segundo plano y se produce cierto intercambio. Los problemas son eso: pretextos para que hablemos de física, para entender mejor los detalles, para adquirir nuevas habilidades, para evaluar cuánta creatividad o precisión pueden desarrollar los alumnos.

Por último están los *problemas de opciones* donde basta indicar cuál de las opciones ofrecidas es la correcta. Hay que saber la misma física, paro hay que ser más rápido y desarrollar cierta estrategia para descartar sonceras. Con un poco de práctica en este tipo de ejercicios se mejora mucho el rendimiento en el ingreso. Pero este no es el tema de este apunte.

Las sugerencias que siguen no se tienen que leer como una lista de requisitos para aprobar el examen. Pueden enseñarles cosas útiles para su futuro trabajo profesional. Las mejores recomendaciones que se me ocurren para resolver un problema de física son:

1. **Leer bien el enunciado**. Hay que dedicarle tiempo a leer el enunciado. No siempre son textos felices, pero en general hay un esfuerzo para que sean claros y esté la información necesaria. Casi la mitad de los problemas mal resueltos en los exámenes se debe a errores de interpretación de los enunciados. Y no porque a veces dejen lugar a diversas interpretaciones, sino a que interpretan lo contrario de lo que se pide. Esta no es una falla menor. La comunicación se está cortando en el primer paso y el escenario al que se enfrentan cambia demasiado. En el futuro trabajo profesional, los problemas no vienen planteados en dos renglones de texto más un dibujito: las preguntas interesantes se encuentran enterradas en una montaña de información. El mundo está lleno de científicos modelizando cosas que no le interesan a nadie porque no entendieron cuáles son los problemas pertinentes.

2. **Simplificar el problema sin matarlo**. Todo problema real es demasiado complejo como para atacarlo con todos sus detalles e implicancias. Quien trata de modelar todos los detalles, sacrifica la comprensión de las cosas en pos de una precisión, que en última instancia es inalcanzable. Por otra parte, si la simplificación es excesiva, del problema no queda la sustancia básica, aquello que motiva las preguntas. Simplificar apropiadamente un problema es un difícil arte que es indispensable que aprendan. Personalmente me gusta atacar los problemas en espiral: primero hago el caso más simple que se me ocurre y luego voy aflojando de a una las aproximaciones y explorando qué agrega cada condición al resultado.

3. **Identificar las variables relevantes**. Hay que ver qué datos necesito para resolver el problema. ¿Son buenos datos? Muchas veces hay datos equivalentes que son mejores que los que propone el enunciado y éste es el momento de reemplazarlos. Por ejemplo si me dan la velocidad de rotación de un tocadiscos en rpm, seguro que me interesa más trabajar con la velocidad angular en rad/s. O si me dan la velocidad inicial de una partícula, ¿Será mejor trabajar con el impulso inicial o tal vez con la energía cinética inicial? La respuesta depende mucho del problema y de los gustos personales. Por supuesto que uno tiene la libertad de notar las cosas como quiera, pero la idea es que aprendan a seguir el enfoque más simple y conceptualmente más rico. A veces falta algún dato que puede estimarse. Siéntanse libres de hacerlo.

4. **Elegir con cuidado las coordenadas del problema**. Existen infinitas maneras de elegir las coordenadas para describir un problema. Pero siempre hay alguna que hace la vida más fácil y bella. A veces es porque tiene la simetría del problema, a veces es porque la energía cinética tiene una expresión más sencilla. Generalmente es una cuestión de olfato que se adquiere con la práctica, mediante prueba y error. Lo que es seguro es que no es una elección sin consecuencias, de manera que vale la pena prestarle atención antes de escribir ninguna fórmula.

5. **Hacer un dibujo**. Es una de las recomendaciones más importantes que se les puede hacer. Hay que hacer un dibujo GRANDE y esquemático (que ocupe al menos un tercio de una hoja A4). En el dibujo conviene incluir la definición de todas las coordenadas, respecto de qué se miden, en qué direcciones son positivas. Conviene (no siempre se puede) dibujar al sistema en una configuración en la que todas las posiciones sean positivas. Es muy peligroso hacer que los ángulos sean positivos en sentido horario. Si son lo suficientemente prolijos, pueden tomar las convenciones más raras que se les ocurra, pero no hay razón para meterse en problemas innecesariamente. A menudo necesito hacer unos dibujos en borrador antes de llegar a la versión definitiva. No es mala idea aprender a hacer dibujos sencillos en perspectiva. Hacer un buen dibujo ayuda a pensar. Aprendan a hacer buenos dibujos. Un buen dibujo no es aquél que satisface la norma ISO, sino una que sea simple y se entienda.

6. **Describir lo que se va a hacer**. Conviene describir *en palabras* la estrategia de resolución. No hace falta explayarse demasiado, pero quien lee no debería tener que deducir el razonamiento mirando una lista

de fórmulas. Conviene describir las aproximaciones, simplificaciones y alcances de lo que va a hacerse.

7. **Escribir las ecuaciones que describen el problema**. Esto puede costar más o menos trabajo, pero cada ecuación representa algo: un vínculo, una definición, una condición. Esto tiene que decirse verbalmente. Las matemáticas son un lenguaje, pero que cobra sentido a partir de la interpretación de los signos. Cada ecuación cuenta una historia, una conexión, un rango de validez, una simplificación.

8. **Resolver algebraicamente el problema**. No conviene ponerse a jugar con las ecuaciones antes de haber planteado todo lo que hace falta. Como regla general, *hacen falta tantas ecuaciones como incógnitas para resolver un problema*. Para que se cumpla lo anterior, las ecuaciones deben ser conceptualmente diferentes, no tienen que ser afirmaciones redundantes escritas con otras variables. Una vez despejado el resultado, ver qué retoques cosméticos puede requerir la solución. Muchas veces, reordenando y agrupando términos o haciendo algunas sustituciones se facilita la interpretación. Personalmente, en este paso me gusta manejarme con dos hojas: una borrador (que al final tiro) donde están mis sustituciones menos inspiradas y otra donde voy poniendo los resultados más interesantes. De esa manera, la línea de razonamientos no se pierde en un mar de fórmulas. Antes de recuadrar la expresión, chequear que las unidades sean las correctas. Es la manera más eficaz de encontrar errores algebraicos.
   Es muy importante hacer bien este paso. Muchos piensan que los errores algebraicos son como la ortografía: son errores, pero igual la idea se entiende. Por supuesto que a veces es así. Hay errores y errores, pero es importante ganar precisión para llegar a un resultado. Equivocarse en las cuentas no tiene consecuencias cuando estamos jugando en clase, pero en el futuro van a tomar decisiones que involucran tiempo y dinero, basados en unos cálculos que sólo ustedes mismos podrán chequear. Les faltan pocos años para que el resultado de sus cuentas se conviertan en objetos del mundo.
   No vale la pena reemplazar los valores numéricos, si los hubiere, hasta último momento. Pudiendo llegar a una fórmula que resuelve *infinitos* problemas ¿por qué conformarse con resolver uno solo?

9. **Interpretar el resultado**. Cuando llegamos a la fórmula final, la recuadramos, sentimos esa microscópica felicidad de labor cumplida, pero en realidad el verdadero problema empieza justamente en este punto: cuando se tiene una expresión. En este punto estamos listos para explorar, interpretar y utilizar en diferentes circunstancias. ¿De qué variables depende el resultado? ¿De qué variables *no* depende el resultado. ¿De qué forma están combinadas esas variables? ¿Qué pasa si algunos parámetros se hacen cero, o son negativos, o son infinitamente grandes? ¿Qué sistemas de la realidad puedo representar con esta expresión? En la historia de la física existen muchos ejemplos donde la chispa está en la interpretación del resultado más que en la cuenta en sí.

Vamos a desarrollar un ejemplo muy elemental para que se entiendan estas ideas. Consideremos el siguiente problema:

$\boxed{1}$ Calcule el alcance de una pelota.

Vamos a resolverlo de manera espiral. Es decir volvemos a pasar varias veces por lo mismo, pero con un punto de vista más detallado.

Resolución 0

Lo que muchos suponen que es una buena solución es algo así:

$$\Delta y = v_{0y} t - \tfrac{1}{2} g t^2 = 0 \qquad (1)$$

$$\Delta x = v_{0x}\, t$$

de (1) $\quad t = \dfrac{2 v_{0y}}{g} \qquad (2)$

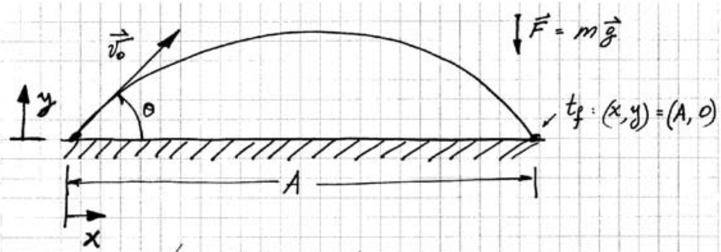
de (2)

$$\boxed{\Delta x = \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g}}$$

De hecho este es el tipo de respuesta que aparece en los primeros exámenes de la carrera. Pero esto no es una respuesta al problema, casi no llega a ser un borrador. El que mira esto tiene que suponer un montón de cosas sólo para *leer* lo que está escrito. Lo único que se demuestra con este tipo de resolución es que se sabe un poco de álgebra (y en este caso, al menos la cuenta está bien). Y no es sólo lo que se muestra: un problema apenas más complicado sería imposible o por lo menos muy difícil de encarar de esta manera.

Resolución 1

Vamos a probar de nuevo. A ver qué les parece ésto:



Los datos del problema son m, g, v_0, θ.
Busco calalar el alcance A.
Voy a resolverlo como un tiro libre, es decir que la única fuerza aplicada es la de la gravedad.
La ecuación de Newton nos dice que:

$$m\vec{g} = m\ddot{\vec{r}}$$

que podemos descomponerla en los direcciones x e y;

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

Integrando estas ecuaciones obtenemos la posición en función del tiempo:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\theta\, t \\ y = v_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

La pelota choco con el piso en $t = t_f$, entonces:

$$\begin{cases} A = v_0 \cos\theta\, t_f \\ 0 = v_0 \operatorname{sen}\theta\, t_f - \frac{1}{2} g t_f^2 \end{cases}$$

Tenemos entonces dos ecuaciones (que expresen las componentes de $\vec{F} = m\vec{a}$) y dos incógnitas (A y t_f).
Trabajamos un poco y despejamos

$$A = \frac{2 v_0^2}{g} \cos\theta \operatorname{sen}\theta$$

que con un poco de cosmética trigonométrica queda

$$\boxed{A = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta}$$

Bien, la cosa pinta mejor. Fíjense que al principio es un poco pesado tener que aclarar tantas cosas que pareciera que todo el mundo sabe, pero les aseguro que educa la mente. No sólo es claro el razonamiento para que lo corrija el pelmazo del docente, esta resolución puedo guardarla y entenderla yo mismo en el futuro.

Sin embargo a esto le falta algo. El resultado no está discutido. Esto es haber hecho el trabajo duro de calcular una expresión, pero dejar que otro la interprete. Es como calentar el agua para que otro se tome los mates. Vamos a darle una vuelta más.

Interpretación

- Antes que nada chequeamos las unidades de nuestro resultado. En el sistema MKS, las unidades del término de la derecha son

  $$\left[\frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta\right] = \frac{(m/s)^2}{m/s^2} = m$$

  que son exactamente las unidades del término de la izquierda (el alcance).

  Podría haberme ahorrado esto si hago la siguiente operación (que es más difícil de contar que de hacer): primero me olvido de la función seno que no tiene unidades, después paso g al otro lado y multiplico ambos miembros por la masa. Obtengo así

  $$mgA = mv_0^2$$

  Esta ecuación no tiene sentido más que para chequear las unidades. A la izquierda tenemos una expresión muy similar que la energía potencial gravitatoria. A la derecha, las unidades son las de la energía cinética. En ambos miembros hay una energía: no hace falta chequear nada más.

- Vemos que el alcance es inversamente proporcional a la aceleración de la gravedad. Los casos límites son $g = 0$ que nos da un alcance infinito (de hecho en este caso la trayectoria es una línea recta hacia la nada), y $g \to \infty$ que nos da un alcance nulo. Y es razonable: cuanta más atracción gravitatoria haya, menos lejos puedo llegar con mi pelota.

- La dependencia con el ángulo es bastante evidente gracias a la cosmética trigonométrica que hicimos al final de nuestro cálculo. Vemos algunos casos límites. Para $\theta = 0°$ el tiro es horizontal, y la función $\sin(2\theta)$ se hace cero. ¿Cómo puede ser esto? Yo sé que si tiro una pelota horizontalmente, la misma toca el suelo a cierta distancia mía y no a mis pies. Lo que sucede es que estoy modelando la situación como si tirara la pelota desde el nivel del piso, y entonces el resultado sí tiene sentido. Lo mismo ocurre cuando tiro la pelota horizontalmente *hacia atrás*, es decir si $\theta = 180°$.

  Si tiro la pelota según la vertical $\theta = 90°$ y entonces $\sin(2\theta)$ otra vez se anula. Por eso no hay que escupir para arriba.

  Hay una propiedad de la función seno que es $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$. Aplicado a nuestro caso, quiere decir que si tiro la pelota con un ángulo θ, el alcance será idéntico que al que obtendría con el ángulo $\pi/2 - \theta$. Es decir que hay dos trayectorias diferentes para llegar al mismo lugar. Esto es bien conocido en el basketball: está la opción de embocar en el aro con un tiro rasante o con un tiro por elevación.

  Hay otra propiedad de la función seno que es interesante, y es que $\sin(\alpha) = -\sin(2\pi - \alpha)$. Esto nos dice que si tiramos la pelota hacia atrás ($\theta > 90°$) el alcance será negativo, y el valor absoluto coincide con el del tiro hacia adelante.

  Por último es fácil ver que el alcance máximo estará en $\theta = 45°$, resultado tan conocido que no vamos a insistir.

  Dejo una inquietud para el lector: si el tiro es hacia adelante y hacia abajo $-90° < \theta < 0°$ está claro que no voy a llegar nada lejos, pero la fórmula nos da un alcance, que es *negativo*. ¿Qué significa eso? Está claro que estamos forzando las matemáticas con este caso, pero nuestra fórmula nos está dando un resultado. ¿De dónde sale? (fíjense el valor de t_f en este caso).

- La dependencia con v_0 es bastante razonable. El alcance es más grande al aumentar la velocidad con que arrojo la pelota. Pero en nuestra expresión la velocidad inicial aparece *dos veces* (v_0^2), ¿Podemos entender por qué?

  Creo que sí. En nuestro cálculo, encontramos a v_0 cuando calculamos el tiempo de vuelo t_f y otra vez cuando reemplazamos en la otra expresión. Es decir que aumentar la velocidad inicial me da dos ventajas, por un lado me da más velocidad en la dirección x y por otro tengo más tiempo para viajar hacia adelante.

- Ya revisamos la dependencia con g, con θ, y con v_0. Parece no quedar nada por hacer. Pero falta ver qué pasó con la masa de la pelota. Era una de las variables del problema pero desapareció del resultado. ¿En qué paso desapareció la masa? Justamente en el primero, cuando escribimos la ecuación $F = ma$. Resulta que con la interacción gravitatoria, la fuerza es proporcional a la masa *gravitatoria*, y el término derecho de la ecuación es proporcional a la masa *inercial*. Como ambas tienen el mismo valor se simplifican y desaparecen del resto del cálculo. Esta equivalencia entre la masa inercial y la gravitatoria es la que da fundamento a la teoría general de la relatividad. De la misma manera, podemos entender por qué en las caídas libres, los péndulos y las bajadas por planos inclinados, suele desaparecer la masa en el resultado.

Condiciones de validez

Por último, como si esto fuera poco, podríamos discutir las condiciones de validez de nuestro cálculo. Recuerden que estoy dando una inundación de ejemplos, no con la intención de que se ahoguen sino que al menos queden salpicados. Hago una lista rápida de hipótesis que hice para llegar al resultado:

- La gravedad es la misma independiente de la altura.
- La tierra es plana (o al menos el piso).
- No tuve en cuenta las correcciones relativistas.
- El rozamiento del aire no lo tuve en cuenta, o lo consideré despreciable.
- No tuve en cuenta que la tierra está girando.

Pero esta lista así enunciada es una lista de fantasmas acechando nuestras afirmaciones. Esta lista ilustra nuestros temores más que los verdaderos alcances del cálculo. Para que realmente sirva, deberíamos poder establecer una jerarquía. No son igual de importantes todas las correcciones. Cada una de ellas pondrá una restricción a nuestro cálculo, pero hay que hacerse cargo y aclarar mejor en qué consiste esta restricción.

Lo que sigue puede resultar un poco extenso y abrumador, pero quisiera dar ejemplos sobrados del tipo de razonamiento que pueden hacerse. Vamos a analizar el rango de validez de cada una de nuestras aproximaciones. Voy a ir enunciando casi todas comenzando por las que me parecen menos importantes.

Correcciones Relativistas. Las correcciones relativistas aparecerán cuando la velocidad inicial (que es la más alta de todo el movimiento) sea comparable a la velocidad de la luz. Es decir que, para que no haya que tener en cuenta correcciones relativistas tiene que ser (todo el mundo debería poder acordarse de memoria el valor de c):

$$v_0 \ll c = 3\,10^8\ m/s.$$

Pero ¿cuánto menor tiene que ser esta desigualdad? La respuesta depende del grado de precisión que seamos capaces de tolerar en el resultado. Como regla general, si queremos un resultado bueno al 1 % necesitamos que $v_0 < 0{,}01c$. De todas maneras cualquier porcentaje de c es una velocidad realmente grande.

La curvatura terrestre. La tierra es curva, y si el tiro es lo suficientemente largo, el piso no está más en $y = 0$, sino un poco más abajo. Sólo quiero estimar cuándo empieza a molestar esto, así que apenas me interesa el orden de magnitud. La curvatura no va a molestar cuando el alcance A sea mucho menor que el radio terrestre R. Considero el tiro más largo posible ($\theta = 45°$) y esa condición se escribe:

$$\begin{aligned} A &\ll R \\ v_0^2/g &\ll R \\ v_0 &\ll \sqrt{Rg} \end{aligned}$$

Antes de discutir este resultado, quisiera calcular el ítem que sigue.

La gravedad no es constante con la altura. Si estoy a una altura h del piso, la gravedad varía inversamente con el cuadrado de la distancia al centro de la tierra $R+h$. La corrección no va a ser importante siempre que $h \ll R$. En ese sentido nuestro tiro más desfavorable será el vertical, que llega a una altura $h = v_0^2/(2g)$. La condición para que valga la aproximación de g constante es

$$\begin{aligned} h &\ll R \\ v_0 &\ll \sqrt{2Rg} \end{aligned}$$

¡pero esta condición es igual a la condición del ítem anterior! (el factor 2 no tiene importancia porque estamos viendo los órdenes de magnitud).

Se me ocurren dos cosas. Primero que esta expresión la tengo vista. Si revuelvo en mi memoria, la velocidad necesaria para escapar del campo gravitatorio se llamaba *velocidad de escape* y valía $v_{esc} = \sqrt{2Rg}$ (es fácil de chequear). Todos deberíamos poder recordar el valor de $g = 10m/s^2$ y el de $R = 6300km$ que son los datos para calcularla.

Esto quiere decir que la condición para que se pueda considerar la gravedad constante y que la tierra se puede aproximar por un plano es exactamente la misma, y consiste en que

$$v_0 \ll v_{esc} \approx 10^4\ m/s.$$

¿Hay algún concepto escondido en que ambas condiciones sean la misma? Creo que sí. De alguna manera, la curvatura de las equipotenciales gravitatorias está relacionada con la variación de la fuerza con la altura.

El rozamiento del aire. Creo que esta es la condición más sensible. Los libros suelen detenerse estupefactos en este punto, y no hay motivos para eso. Al menos para poder estimar un orden de magnitud. El rozamiento del aire lo voy a poder despreciar cuando la fuerza de rozamiento sea mucho menor que la otra fuerza que actúa en el problema: la de la gravedad. La condición se escribe:

$$F_r \ll mg.$$

Pero para poder usarla necesitamos un modelo para el rozamiento del aire. Vamos a inventarlo con lo que oímos en los pasillos. La fuerza de rozamiento depende de la velocidad del móvil y es una función creciente con la velocidad. Para velocidades relativamente bajas suele modelarse como una función lineal. La fuerza de rozamiento depende además del tamaño del objeto. Más exactamente dependerá del área expuesta al movimiento. Si llamamos r al radio de la pelota podemos modelar al rozamiento como

$$F_r = \kappa\ v\ r^2$$

pero ¿de dónde sacamos el valor de κ? Como no quiero ir a ninguna tabla y sólo quiero un orden de magnitud, tengo que basarme en alguna experiencia conocida y que pueda estimar rápidamente. A mí se me ocurrieron dos. La más sencilla es basarme en la velocidad límite con la que cae un globo de cumpleaños. Para un globo de cumpleaños $r \approx 10cm$, $v_{lim} \approx 1m/s$ y $m = 10g$. Esto lo sé porque me encanta intoxicarme con chizitos en los cumpleaños. Cuando un móvil llega a su velocidad límite, la fuerza de rozamiento es igual a la de la gravedad. De esa condición resulta que

$$\kappa = \frac{mg}{v_{lim}\ r^2} \approx 10\ \frac{kg}{m^2 s}.$$

Curiosamente el otro experimento que pensé es que cuando saco la mano por la ventanilla del auto, la mano empieza a 'volar' cuando voy cerca de $100km/h$. Le puse números y me dio el mismo valor de κ. (guau!)

Ahora sí, puedo volver a la condición de que el rozamiento sea despreciable y reemplazar. Obtuve:

$$v \ll \frac{mg}{\kappa\, r^2} = \frac{g}{\kappa}\, \rho\, r \ .$$

Esta es una expresión muy interesante. El término de la derecha es la velocidad límite de la caída vertical. Fíjense que si quiero minimizar el efecto del rozamiento del aire, puedo utilizar objetos más pesados ó más chicos o ambas cosas. A igual densidad, me convienen los objetos más grandes y a igual tamaño serán mejor los más densos. También puedo inventar una *ley de escala* donde a los objetos que tengan igual cociente m/r^2 (ó $\rho\, r$) les afecta en igual medida el rozamiento del aire, por ejemplo: un bombita de agua inflada con aire caería de la misma manera que una gota de agua o que una bolita de hierro del diámetro de un pelo.

Para ilustrar esta expresión vamos a calcular tres casos. **Caso 1**: un bollo de papel tiene una masa de $10g$ y un radio de $5cm$. Reemplazando obtenemos la condición $v_0 \ll 4\ m/s$. **Caso 2**: una pelota de golf tiene una masa de $100g$ y un radio de $3cm$. Reemplazando obtenemos la condición $v_0 \ll 100m/s$. **Caso 3**: una bala de cañón de barco pirata tiene una densidad que es ocho veces la del agua y un radio de $10cm$. Reemplazando obtenemos la condición $v_0 \ll 3000m/s$.

Bien. Por fin estamos listos para hablar de los rangos de validez de nuestra expresión. Vamos a presentar los resultados en una tablita. Aquí la condición de la aproximación siempre la escribo $v \ll v_{lim}$. Pero la velocidad no me da una buena idea de qué tipo de tiro estoy pensando, de manera que incluí el alcance máximo que corresponde dicha velocidad límite:

Corrección	v_{lim}	A_{lim}
Efectos relativistas	$c = 3\ 10^8\ m/s$	$10^{16}m \approx 10^4$ veces el tamaño del sistema solar
Gravedad constante	$v_{esc} = 10^4\ m/s$	$10^7 m \approx 2$ radios terrestres
Tierra plana	"	"
Rozamiento del aire:	$\frac{mg}{\kappa\, r^2}$	
(bollo papel)	$4\ m/s$	$1{,}6\ m$
(bola golf)	$100m/s$	$10^3\ m = 1\ km$
(bala cañón)	$3000m/s$	$10^6\ m = 1000\ km$

Las conclusiones que puedo sacar de esta tabla son:

- Los efectos relativistas *nunca* van a ser un problema en nuestra expresión. Antes que eso voy a estar escapándome del sistema solar y en ese caso habrá muchas otras cosas que fallen.

- La corrección de la gravedad constante y la tierra plana deben hacerse juntas. En general se me ocurre que antes habrá que tener en cuenta el rozamiento del aire. Pero tal vez no sea así: supongamos que queremos arrojar un zapato de Bariloche a Buenos Aires (1700km). Hago un tiro a 45° para no cansarme el brazo. Pero como la parte más densa de la atmósfera tiene apenas unos $10km$ de espesor, el zapato saldrá de la atmósfera en Dina Huapi (suburbio barilochensis) y volverá a entrar en Ramos Mejía. Se encontrará en la parte baja de la atmósfera apenas un 1 % de su recorrido. Tal vez en este caso se podría despreciar el rozamiento del aire y no la curvatura ni la uniformidad de la gravedad. Habría que probar si el zapato se la aguanta.

  La idea no es tan loca, o al menos ya se le ocurrió a alguien. Al final de la primera guerra mundial, los alemanes lograron tirar algo más que zapatos a más de 100 kilómetros de distancia. El largo alcance lo conseguían con el cañón *Gran Berta*, que lograba lanzar proyectiles de 120 kg por encima de la parte más densa de la atmósfera.

- En los tiros oblicuos de hasta unos cientos de kilómetros la única corrección relevante es la del rozamiento del aire. Eso dependerá del tamaño del objeto y de su masa.

La idea de estas recomendaciones es darles ejemplos del tipo de habilidades que sería bueno que desarrollen. Y lo van a hacer mejor cuanto más practiquen. Recuerden que no hay problemas tontos, a lo sumo puede ocurrir que a uno no se le ocurran cosas interesantes.

No estoy seguro que haga falta hacer de esta manera todos los problemas que uno encuentra por la vida, pero seguramente vale la pena ejercitar todo lo posible estas habilidades a las que no están habituados.

Referencias

Reading the equations and confronting the phenomena
– The delights an dilemmas of physics teaching
Robert H. Romer
American Journal of Physics, 61 (2), pp 128–142, 1993.

Sobre el cañón Gran Berta, se puede leer algo en la página de *Física Recreativa* de Yakov Perelman:
http://www.geocities.com/yakov_perelman/FisicaRecreativa_I/capitulo03.html